**DST Mathématiques**

**Durée : 2 heures**

*Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.*

*Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.*

*Barème approximatif sur 25*

**EXERCICE 1***( 9 points)*

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité des récipients cylindriques pour le laboratoire.

A*. Loi normale*

Le couvercle d’un récipient est conçu pour avoir un diamètre de 60 millimètres.

Il est non défectueux lorsque son diamètre, exprimé en millimètres, appartient à l’intervalle suivant [59,93 ; 60,07].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque récipient prélevé au hasard dans la production d’une journée, associe le diamètre, en millimètres, de son couvercle.

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 60 et d’écart type 0,03.

Calculer la probabilité qu’un récipient prélevé au hasard dans la production ait un couvercle défectueux. On arrondira à 10−4.

B. *Evènements indépendants*

Les récipients fabriqués sont susceptibles de présenter deux défauts : un défaut au niveau de leur couvercle ou un défaut de contenance.

On prélève un récipient au hasard dans la production d’une journée.

On considère les évènements suivants :

E1: « le couvercle du récipient prélevé est défectueux » ;

E2: « le récipient prélevé présente un défaut de contenance ».

On suppose que les évènements E1 et E2 sont indépendants.

On admet que P(E1)=0,02 et P(E2)=0,01.

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

1. Calculer la probabilité qu’un récipient prélevé au hasard dans la production d’une journée présente les deux défauts.
2. Calculer la probabilité qu’un récipient prélevé au hasard dans la production d’une journée présente au moins un des deux défauts.
3. Calculer la probabilité qu’un récipient prélevé au hasard dans la production d’une journée ne présente aucun des deux défauts.

C. *Loi binomiale et approximation d’une loi binomiale par une loi de Poisson*

On prélève au hasard 50 récipients dans un stock pour vérification de leur couvercle. Le stock est assez important pour que l’on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 récipients.

On rappelle que la probabilité qu’un récipient prélevé au hasard ait un couvercle défectueux est égale à

0,02.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 récipients, associe le nombre de récipients de ce prélèvement ayant un couvercle défectueux.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Justifier votre réponse et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, un seul récipient ait un couvercle défectueux. On arrondira à 10−2.
3. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, il y ait entre 3 et 15 récipients ayant un couvercle défectueux
4. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On désigne par Y1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au a.

En utilisant la loi suivie parY1, calculer la probabilité qu’au plus trois récipients d’un prélèvement aient un couvercle défectueux. On arrondira à 10−2.

D. *Intervalle de confiance*

Dans cette partie on s’intéresse à la contenance de chaque récipient, exprimée en centimètres cubes.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 récipients dans un lot important.

Pour l’échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10−2, est : = 119,88 et son écart type est égal à σe = 1.9

1. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des contenances des récipients de ce lot ainsi qu’une estimation ponctuelle de son écart type σ au centième
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur  de la moyenne μ des contenances des récipients de ce lot, avec un taux de confiance de 99 %. On arrondira à 10−2 les bornes de cet intervalle.

**EXERCICE 2 :** *Loi normale exercice d’application des notions vues en cours ( 6 points)*

**Partie A**

On considère la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne 100 et d’écart-type 10.

1. Déterminer ( arrondir à l’entier)  tel que :
2. P ( X ≤  ) = 0.8413
3. P ( 90 ≤ X ≤  ) = 0.5
4. P ( X ≥  ) = 0.0332
5. P (  ≤ X ≤ 108 ) = 0.2113

**Partie B**

1. On considère la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne μ = 100 et d’écart-type σ. Déterminer σ tel que P ( X ≤ 91 ) = 0.115
2. On considère la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne μ et d’écart-type σ = 10. Déterminer μ tel que P ( X ≤ 120 ) = 0.9332

**EXERCICE 3 :** *( 10 points)*

Les bordures d’autoroute possèdent parfois des bassins de décantation dont le rôle est de recueillir les eaux pluviales ruisselant sur l’asphalte et les éléments polluant qu’elles peuvent drainer.

À la suite d’un accident de la circulation, un camion-citerne déverse une partie de son contenu sur la chaussée d’une autoroute. La réglementation en vigueur impose l’isolation, par fermeture de vannes, du bassin de décantation proche de l’accident de façon à ce que la concentration en matières polluantes dans le bassin ne dépasse pas 15μg/L. Cette concentration est de 1,3μg/L au moment où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin.

Dans cet exercice, on cherche à prévoir au bout de combien de temps la concentration en matières polluantes dans le bassin atteindra 15μg/L si on n’isole pas le bassin et à quel moment les capteurs installés dans le bassin déclencheront la fermeture des vannes.

On mesure en minute le temps  écoulé à partir de l’instant où les matières polluantes provenant du camion-citerne commencent à se déverser dans le bassin de décantation.

On admet que, tant que le bassin n’est pas isolé par fermeture des vannes, la concentration à l’instant  en matières polluantes dans le bassin, exprimée en μg/L peut être modélisée paroù f est solution de l’équation différentielle  (E) :.

On a donc : 

1. *Résolution d’une équation différentielle*

On considère l’équation différentielle (H) : , où  est une fonction de la variable réelle définie et dérivable sur l’intervalle [0 ;+∞[, et la fonction dérivée de.

1. Déterminer les solutions sur l’intervalle [0 ; +∞[ de l’équation différentielle (H)
2. Soit  la fonction définie sur l’intervalle [0 ; +∞[ par , où  est une constante réelle. Déterminer que pour que la fonction soit une solution particulière de l’équation différentielle (E).
3. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution  de l’équation différentielle (E) qui prend la valeur 1.3 pour  = 0.
5. *Étude d’une fonction.*

Soit la fonctiondéfinie sur l’intervalle I = [0 ;+∞[ par : 

On désigne par C la courbe représentative de la fonction  dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction en + ∞.
2. On désigne par la fonction dérivée de la fonction
3. Calculer que pour  appartenant à l’intervalle I.
4. En déduire le signe desur I et dresser le tableau de variations complet de la fonction sur l’intervalle [0 ;+∞[.
5. *Traitement de la problématique*

On rappelle que modélise la concentration (exprimée en μg/L) en matières polluantes dans le bassin à l’instant  (exprimé en minutes) tant que le bassin n’est pas isolé par fermeture des vannes.

1. Si le bassin n’était pas équipé d’un dispositif d’isolation par fermeture de vannes, quelle serait la valeur autour de laquelle se stabiliserait la concentration en matières polluantes? Justifier.
2. Déterminer une valeur approchée à l’unité du temps  (exprimé en minute) au bout duquel la concentration en matières polluantes dans le bassin atteindrait 15μg/L si le bassin n’était pas isolé par fermeture de vannes.
3. La concentration en matières polluantes dans le bassin est relevée par un capteur dont les mesures sont légèrement instables. Pour prendre en compte cette instabilité, on met en place un dispositif associant la fermeture des vannes à l’instant  ( > 2) à la valeur moyenne de la concentration en matières polluantes mesurée par le capteur entre les instants  et. La fermeture des vannes est déclenchée lorsque cette valeur moyenne atteint 14μg/L.La valeur moyenne de la concentration (exprimée en μg/L) en matières polluantes entre les instants  etest modélisée par :



a. Donner une primitive F de la fonction sur l’intervalle [0 ;+∞[.

b. Calculer 

c. Résoudre . Donner une valeur approchée au dixième de la solution T de cette équation.

d. Que représente T dans le contexte de l’exercice ?